

ZJEDNODUŠENÉ DYNAMICKÉ MODELY V OPTIMALIZACI VYPRUŽENÍ, ČÁST 2.

SIMPLIFIED DYNAMIC MODELS IN SUSPENSION OPTIMIZATION, PART 2

Zdeněk ČERVENKA¹, Miroslav BYRTUS²

e-ISBN: 978-80-7560-564-1
DOI: 10.46585/spkv20252661

ISSN: 3029-8342



Abstrakt

Příspěvek se zabývá praktickým použitím zjednodušených dvoumotových a třímotových tlumených dynamických modelů v optimalizaci návrhu vypružení kolejového vozidla. Text navazuje na předchozí příspěvek přednesený na XXVI. mezinárodní konferenci PRORAIL 2023 v Žilině.

Příspěvek se zabývá simulací jízdy dvoumotového a třímotového tlumeného modelu na reálných nerovnostech s vyhodnocením různých ukazatelů známek komfortu na skříni a optimalizací charakteristik tuhosti i tlumení v sekundárním vypružení. V příspěvku jsou vyčísleny následující známky komfortu: standardní metoda středního pohodlí N_{MV} , úplná metoda středního pohodlí N_{VD} a trvalé pohodlí C_{Cz} dle EN 12299. Na závěr příspěvek uvádí srovnání výsledků optimalizací hodnot tuhostí i tlumení sekundárního vypružení pro jednotlivé známky komfortu a pro různé nerovnosti trati i rychlosti jízdy.

Klíčová slova

zjednodušený dynamický model kolejového vozidla, komfort pro cestující

Abstract

The paper deals with the practical use of simplified 2-mass and 3-mass damped dynamic models in the optimization of suspension design of a rail vehicle. The text follows previous paper presented at the XXVI. International Conference PRORAIL 2023 in Žilina.

The paper deals with the simulation of the travel of a 2-mass and 3-mass damped model on real measured track irregularities with the evaluation of various indicators of comfort on the carbody and the optimization of stiffness and damping characteristics in the secondary suspension. The paper calculates the following comfort indexes: the standard method of mean comfort N_{MV} , the complete method of mean comfort N_{VD} and the permanent comfort C_{Cz} according to EN 12299. Finally, paper presents a comparison of the optimization results of the characteristics of secondary dampers for individual comfort indexes for various track irregularities and running speeds.

Keywords

simplified dynamic model of rail vehicle, passenger comfort

¹ Ing. Zdeněk Červenka. ŠKODA TRANSPORTATION a.s. Emila Škody 2922/1, 301 00 Plzeň, Česká republika, tel.: +420 378 186 067, e-mail: zdenek.cervenka@skoda.cz

² doc. Ing. Miroslav Byrtus, Ph.D. ZČU v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky. Technická 8, 301 00 Plzeň, Česká republika, e-mail: mbyrtus@kme.zcu.cz

1 ÚVOD

Hlavní motivací pro použití zjednodušených modelů při návrhu a optimalizaci svislého vypružení kolejového vozidla je možnost rychle v úvodní fázi projektu navrhnout parametry tuhostí a tlumení vzhledem k projektovaným hmotnostem skříně i podvozku a ověřit základní vlastnosti vypružení (např. vlastní frekvence, velikosti zrychlení a komfortu). V dalších fázích projektu umožňují tyto modely provedení nezávislé jednoduché kontroly a usnadňují interpretaci výsledků získaných z komplexních, multi-parametrických MBS výpočtových modelů.

Zjednodušené modely kmitání byly v souvislosti s analýzou dynamického chování kolejových vozidel využívány u nás od 30. let 20. století. O tuto oblast se u nás zasadili zejména pánové prof. Ing. Ladislav Freibauer a jeho škola: prof. Ing. Ladislav Rus, DrSc., prof. Ing. Daniel Kalinčák, PhD.

Dále prof. Ing. Robert Nejepsa, DrSc. a jeho škola: prof. Ing. Jaroslav Šíba, DrSc., prof. Ing. Jiří Izer, CSc., doc. Jaromír Zelenka, Ph.D., Ing. Ivo Pelant, CSc., Ing. Miloslav Mohyla, CSc., Ing. Vojtěch Štajer CSc. Dalšími osobnostmi z této oblasti byli z VÚKV Ing. Zdeněk Reinhardt, z VÚŽ Ing. Luděk Pilmann, Ing. Arnošt Suske, CSc., Mgr. Antonín Vaněček a ve Škodových závodech Ing. Jiří Vohradský a Ing. Aleš Tuček.

V začátcích se jednalo o svislé jedno-, dvou- a třímotové netlumené/tlumené analyticky řešené modely s vynucenými kmity. V osmdesátých letech 20. století to už byly optimalizační úlohy na dvou- a třímotových tlumených modelech numericky řešených na sálových počítačích.

V předchozím příspěvku [1] byly představeny možnosti využití 2-hmotových tlumených modelů realizovaných jak ve frekvenční oblasti buzených výkonovou spektrální hustotou trati, tak i modelů realizovaných v časové oblasti jedoucích po reálných změřených nerovnostech. Zejména bylo představeno srovnání dvou klasických optimalizačních metod pro nalezení optimálních hodnot vypružení, popsanych dříve v literatuře [2], kapitola 2.3.2, str. 47:

A) metoda minimalizace rozptylu zrychlení na skříní vozidla,

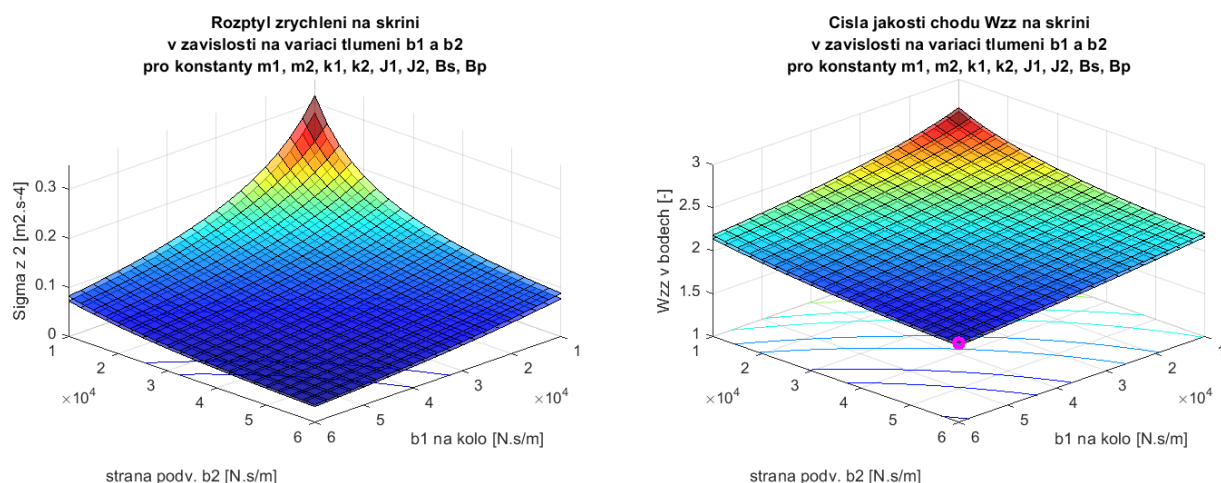
B) metoda minimalizace frekvenčního přenosu vypružení vozidla.

Jako ilustrační příklad byl použit čtyřnápravový podvozkový osobní vůz s dvoustupňovým vypružením a tlumením s parametry uvedenými v [2]. V předchozím příspěvku bylo ukázáno, že **jak metoda založená na minimalizaci rozptylu zrychlení, tak i metoda minimalizace frekvenčních přenosů dávají dobré hodnoty konstant sekundárních tlumičů. U hodnot primárních tlumičů, ale obě metody selhávají, protože ve výsledku se primární vypružení dostává na hodnoty kritického útlumu.** Dále bylo ukázáno srovnání mnoha typů vozidel na těchto modelech ve frekvenční i časové oblasti, z čehož bylo patrné, že i tyto zjednodušené modely mají cennou vypovídající hodnotu.

Tento příspěvek se nyní zaměřuje na **optimalizaci parametrů tuhosti a tlumení v sekundárním vypružení na konkrétní známky komfortu na skříní dle standardu EN 12299 při použití dvoumotových a třímotových modelů svislého kmitání vozidla.** Modely jsou sestaveny v časové oblasti a jsou buzeny reálnými svislými změřenými nerovnostmi koleje při různých rychlostech jízdy, algoritizace je provedena v programovém prostředí Matlab firmy MathWorks.

2 VOLBA PARAMETRŮ OPTIMALIZACE

Jak bylo ukázáno v předchozím příspěvku [1], a je patrné na obr. 1, zvolíme-li prostor pro optimalizaci komfortu na skříní **parametry tlumení b1 v primárním a b2 v sekundárním vypružení**, nelze získat prakticky použitelný výsledek, protože bude s rostoucím primárním tlumením b1 komfort na skříní stále klesat (zlepšovat se) a to i v případě, že už se hodnoty primárního tlumení budou dostávat na kritický útlum a tedy pohyb primárního vypružení už nebude periodický. Jak je konstatováno v [2], tak **„pohyb vozidla při houpání musí být vždy periodický, tj. tlumení musí být podkritické.“**



Obr. 1 Optimalizace rozptylu zrychlení na skřini a čísla jakosti chodu Wz v závislosti na tlumení b1 a b2 (v primárním a v sekundárním vypružení), tříhmotový tlumený model ve frekvenční oblasti.

Metoda optimalizace vypružení popsaná v tomto příspěvku spočívá ve změně parametrů, které do optimalizace komfortu na skřini vstupují oproti parametrům zvoleným v literatuře [4], str. 49. Tlumení v primárním vypružení b1 je z optimalizace vyloučeno (tedy vstupuje do výpočtu pouze jako konstanta) a jsou zvoleny parametry optimalizace komfortu na skřini následující:

- 1) Tuhost sekundárního vypružení k2
- 2) Tlumení sekundárního vypružení b2

U hodnoty tlumení primárního vypružení u kolejového vozidla navíc platí, že plní také další funkce, jako zejména tlumení pohybu kývání a kolébání rámu podvozku. Další úvahy v příspěvku jsou vedeny tedy v prostoru hodnot k2, b2.

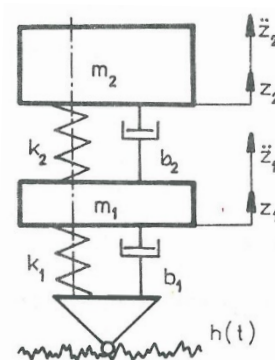
3 PARAMETRY ZJEDNODUŠENÝCH (REDUKOVANÝCH) MODELŮ

3.1 Dvuhmotový model svislého kmitání vozidla se 2 stupni volnosti v časové oblasti

Kolejové vozidlo je v tomto modelu redukováno na 2 hmoty a 2 stupně vypružení reprezentující polovinu hmoty skříně, hmotnost vypružených hmot podvozku a tuhosti i tlumení mezi nimi. Parametry jsou převzaty z [2] a představují náhradu čtyřnápravového podvozkového osobního vozu s dvoustupňovým vypružením. Model je vytvořen v časové oblasti a je buzený reálnými svislými změřenými nerovnostmi koleje.

Tab. 1 Parametry dvuhmotového tlumeného modelu dle [2], kapitola 4.6.4. str. 212

m ₁ – hmotnost 1x vypružených hmot podvozku	3 050	kg
m ₂ – hmotnost 2x vypružených hmot ½ skříně	13 100	kg
k ₁ – tuhost primárního vypružení na podvozek	$4 \cdot 832,8 \cdot 1000 = 3\,331\,500$	N.m ⁻¹
k ₂ – tuhost sekundárního vypružení na podvozek	$2 \cdot 804,5 \cdot 1000 = 1\,609\,000$	N.m ⁻¹
b ₁ – tlumení primárního vypružení na podvozek	$4 \cdot 10 \cdot 1000 = 40\,000$	N.s.m ⁻¹
b ₂ – tlumení sekundárního vypružení na podvozek	$2 \cdot 40 \cdot 1000 = 80\,000$	N.s.m ⁻¹



Obr. 2 Redukovaný dvuhmotový tlumený model dle [2]

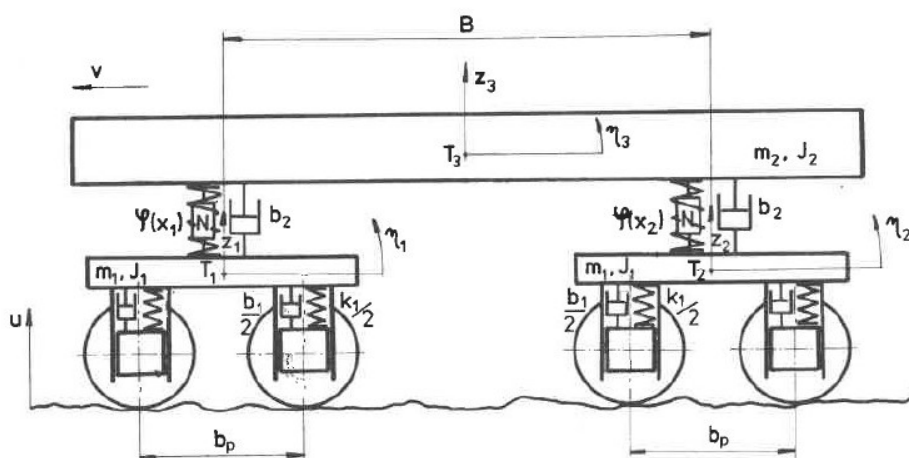
3.2 Tříhmotový model svislého kmitání vozidla se 6 stupni volnosti v časové oblasti

Kolejové vozidlo je v tomto modelu redukováno na 3 hmoty a 2 stupně vypružení reprezentující hmotu skříně, obě vypružené hmoty podvozků a tuhosti i tlumení mezi nimi. Parametry jsou převzaty z [3] a představují náhradu čtyřnápravového podvozkového osobního vozu s dvoustupňovým vypružením. Tento model má 6 stupňů volnosti, tzn. uplatní se zde jak houpání, tak i kývání všech 3 náhradních hmot vozidla. Do modelu vstupuje vzdálenost otočných čepů podvozků, rozvor náprav podvozků i momenty setrvačnosti všech hmot.

Model je vytvořen v časové oblasti a je buzený reálnými svislými změřenými nerovnostmi koleje.

Tab. 2 Parametry tříhmotového tlumeného modelu dle [3], kapitola 3.4.1 str. 90

m_1 – hmotnost 1x vypružených hmot podvozku	2 000	kg
m_2 – hmotnost 2x vypružených hmot skříně	24 000	kg
k_1 – tuhost primárního vypružení na podvozek	$4 \cdot 1042,5 \cdot 1000 = 4\,170\,000$	N.m^{-1}
k_2 – tuhost sekundárního vypružení na podvozek	$2 \cdot 1160,0 \cdot 1000 = 2\,320\,000$	N.m^{-1}
b_1 – tlumení primárního vypružení na podvozek	$4 \cdot 10 \cdot 1000 = 40\,000$	N.s.m^{-1}
b_2 – tlumení sekundárního vypružení na podvozek	$2 \cdot 40 \cdot 1000 = 80\,000$	N.s.m^{-1}
η_1 – moment setrvačnosti 1x vypružených hmot podvozku	1 200	kg.m^2
η_2 – moment setrvačnosti 2x vypružených hmot skříně	$1,7 \cdot 10^6$	kg.m^2
B – vzdálenost otočných čepů podvozků	19,0	m
b_p – rozvor podvozků	2,6	m



Obr. 3 Redukovaný tříhmotový tlumený model dle [3]

4 ZPŮSOBY HODNOCENÍ KOMFORTU NA SKŘÍNI DLE EN 12299 A JEJICH ALGORITMIZACE

Hodnocení jízdního pohodlí bylo provedeno dle metodiky uvedené v EN 12299, která pro stanovení středního jízdního pohodlí definuje dvě metody. Standardní metoda zohledňuje vibrace na rozhraní podlahy vozu, zatímco úplná metoda uvažuje vibrace na rozhraních sedadlo anebo podlaha. Úplná metoda tedy není relevantní v případě výše uvedeného zjednodušeného modelu, neboť představené modely lze využít pro simulaci chování vozidla pouze ve svislém směru.

Stanovení ukazatelů pohodlí je založeno na následujícím postupu. Model je využit pro simulaci jízdy vozidla po reálných změřených traťových nerovnostech. Vstupní data jsou pro danou rychlost vozidla upravena tak, aby bylo možné souvisle provést simulaci jízdy po 60 úsecích tratí v délce trvání 5 s. Ze získané časové odezvy v referenčních bodech vozidla jsou pro tyto body zrekonstruovány odpovídající časové průběhy zrychlení. Ty jsou pak pro každý úsek převedeny pomocí Fourierovy transformace do frekvenční oblasti. Tato spektra zrychlení jsou pak dále filtrována dle EN 12299.

4.1 Standardní metoda středního pohodlí N_{mv} dle EN 12299

Pro stanovení tohoto ukazatele jsou uvažována pouze vážená zrychlení z každého úseku ve svislém směru (osa z, index Z) a jsou určeny tzv. efektivní hodnoty (RMS). Získané efektivní hodnoty jsou seřazeny dle velikosti vzestupně a do následujícího vztahu pak vstupuje hodnota odpovídající 95% percentilu (index P95).

$$N_{MV} = 6 \cdot \sqrt{\left(a_{XP95}^{w_d}\right)^2 + \left(a_{YP95}^{w_d}\right)^2 + \left(a_{ZP95}^{w_b}\right)^2} \quad (1)$$

4.2 Úplná metoda středního pohodlí N_{VD} dle EN 12299

Tento ukazatel je určen stejným postupem jako ukazatel N_{MV} s tím rozdílem, že je uvažován 50 % percentil efektivní hodnoty zrychlení ve svislém směru (ZP50).

$$N_{VD} = 3 \cdot \sqrt{16 \cdot \left(a_{XP50}^{w_d}\right)^2 + 4 \cdot \left(a_{YP50}^{w_d}\right)^2 + \left(a_{ZP50}^{w_b}\right)^2 + 5 \cdot \left(a_{YP95}^{w_d}\right)^2} \quad (2)$$

4.3 Trvalé pohodlí C_{Cz} dle EN 12299

Obecně je tento ukazatel definován jako klouzavá efektivní hodnota váženého zrychlení na přes časový úsek délky T . Zde jsou nejdříve stanoveny hodnoty trvalého pohodlí (jako efektivní hodnota váženého zrychlení) pro každý úsek délky $T = 5$ s z uvažovaných 60 úseků. Výsledná hodnota ukazatele je pak stanovena jako střední hodnota dílčích hodnot trvalého pohodlí.

$$C_{Cz}(t) = a_{ZP}^{w_b}(t) \quad (3)$$

5 VÝSLEDKY

Na obou redukovaných modelech s parametry definovanými v kapitolách 3.1 a 3.2 byly provedeny simulační jízdy na změřených nerovnostech trati 2 typů. Jednak na koridorové trati s rychlostí 160 km/h a také na regionální trati s rychlostí 100 km/h. **Každá simulace byla provedena pro cca 1000 průjezdů daným úsekem s variací hodnot tuhosti sekundárního vypružení k_2 a tlumení sekundárního vypružení b_2 .**

5.1 Dvuhmotový model svislého kmitání vozidla se 2 stupni volnosti

Na obr. 4 až 7 níže jsou patrné výsledné 3D plochy komfortu na skříní v závislosti na variaci parametrů k_2 a b_2 :

1) svislé efektivní zrychlení Az_{RMS} na skříní, viz obr. 4 a 6

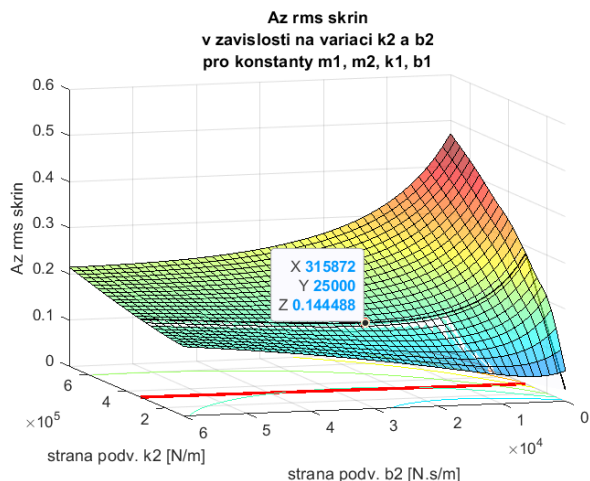
2) svislá složka indexu N_{MV} dle EN 12299 na skříní, viz obr. 5 a 7

Po získání tvaru ploch ovšem vyvstává otázka, jak na nich určit optimální parametry sekundárního vypružení. Platí, že s klesající hodnotou tuhosti sekundárního vypružení, klesá i index komfortu na skříní k nule. Byla proto dále provedena modální analýza a vypočítána plocha 1. vlastní frekvence (houpání skříně) v závislosti na k_2 , b_2 , viz obr. 8. Na této ploše byl udělán řez vybranou frekvencí houpání, např. 1 Hz (což je frekvence příjemná lidskému organismu). Průsečnice je promítnuta do horizontální roviny XY, čímž vznikne křivka konstantní frekvence houpání. Křivka reprezentuje kombinaci parametrů k_2 , b_2 potřebných pro dosažení frekvence houpání na skříní 1 Hz. Tato křivka je následně promítnuta na plochy Az_{RMS} v obr. 4 a 6 a také na plochy N_{MV} dle EN 12299 v obr. 5 a 7.

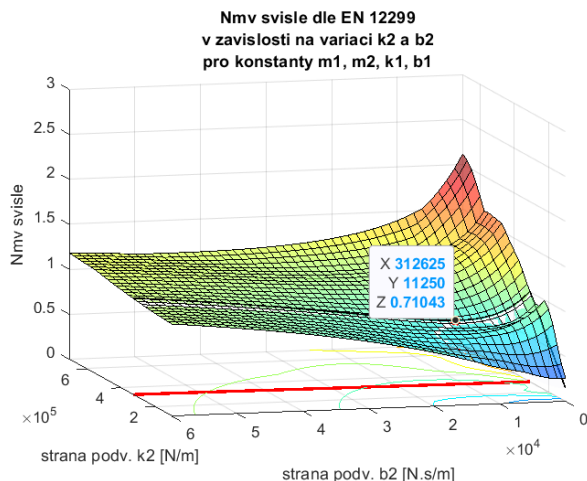
Na této křivce je následně určeno minimum, které představuje nejlepší možnou hodnotu známky komfortu na skříní, kterého lze teoreticky dosáhnout, pokud je zvolena konkrétní cílová frekvence houpání.

- Na obr. 4 je patrná optimální hodnota tlumení **$b_2 = 25$ kNs/m** a tuhost **$k_2 = 316$ N/mm.**
- Na obr. 5 je patrná optimální hodnota tlumení **$b_2 = 11,3$ kNs/m** a tuhost **$k_2 = 311$ N/mm.**
- Na obr. 6 je patrná optimální hodnota tlumení **$b_2 = 18,8$ kNs/m** a tuhost **$k_2 = 314$ N/mm.**
- Na obr. 7 je patrná optimální hodnota tlumení **$b_2 = 15$ kNs/m** a tuhost **$k_2 = 311$ N/mm.**

Koridorová trať, rychlost 160 km/h

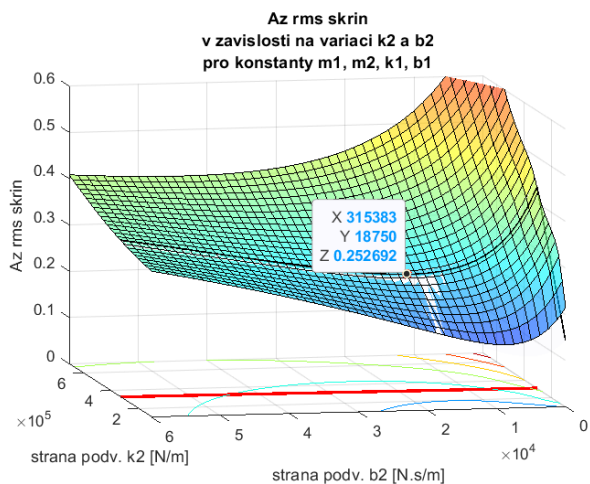


Obr. 4 Az RMS v závislosti na variaci k2, b2

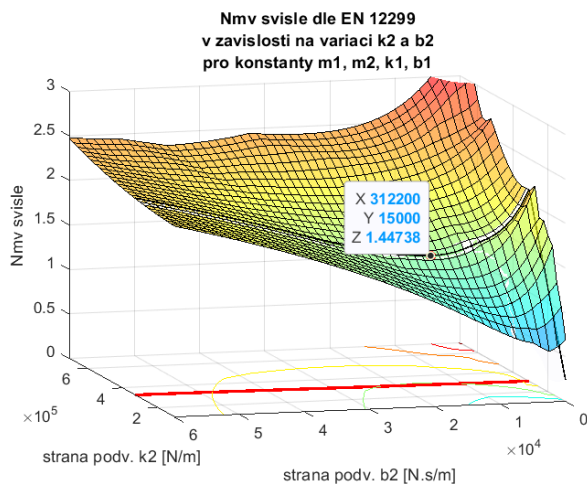


Obr. 5 Nmv dle EN 12299 v závislosti na variaci k2, b2

Regionální trať, rychlost 100 km/h

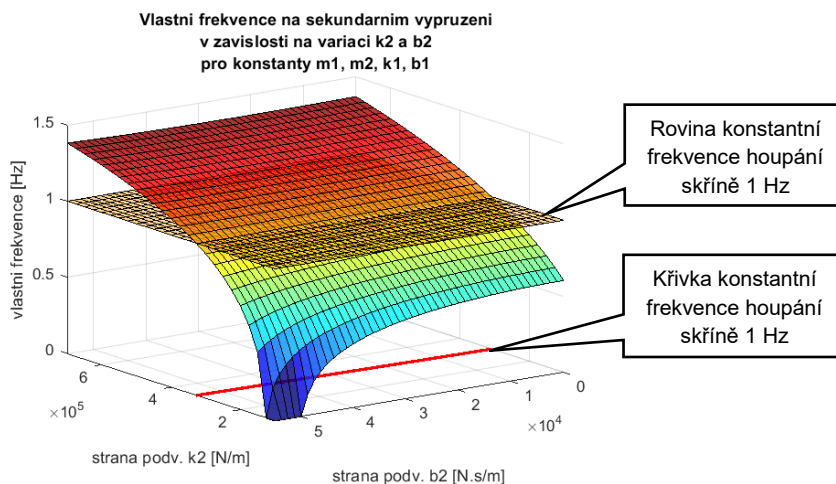


Obr. 6 Az RMS v závislosti na variaci k2, b2



Obr. 7 Nmv dle EN 12299 v závislosti na variaci k2, b2

Průběh první vlastní frekvence skříně (houpání) v závislosti na parametrech k2, b2



Obr. 8 Průběh 1.vlastní frekvence v závislosti na variaci k2, b2. Horizontální plocha představuje řez na frekvenci o hodnotě 1 Hz

5.2 Třímotový model svislého kmitání vozidla se 6 stupni volnosti

Na obr. 9 až 13 níže jsou patrné výsledné 3D plochy komfortu na skříní v závislosti na variaci parametrů k_2 a b_2 :

- 1) index N_{MV} dle EN 12299 na skříní, viz obr. 9
- 2) index N_{VD} dle EN 12299 na skříní, viz obr. 10
- 3) index C_{Cz} dle EN 12299 na skříní, viz obr. 11
- 4) efektivní zrychlení $A_{z_{RMS}}$ na skříní, viz obr. 12
- 5) rozptyl zrychlení Sigma Z na skříní (integrální veličina FFT), viz obr. 13

Po získání tvaru ploch ovšem vyvstává opět otázka jako v předchozí kapitole, jak na nich určit optimální parametry sekundárního vypružení, tj. kde hledat minimum. Platí, že s klesající hodnotou tuhosti sekundárního vypružení, opět klesá i index komfortu na skříní k nule. U toho modelu byly zvoleny dva přístupy:

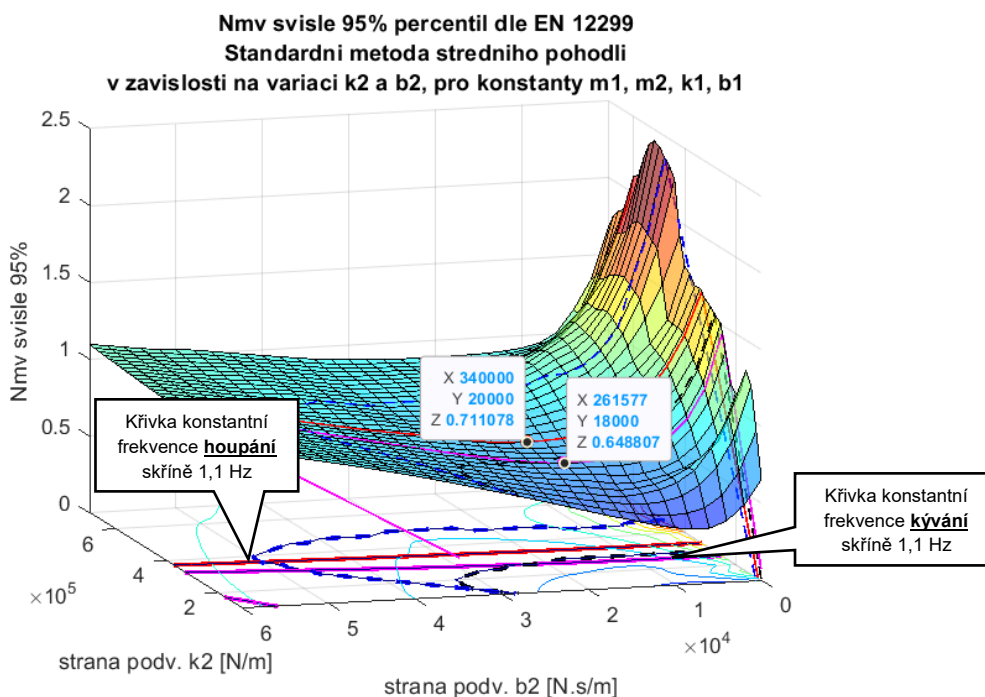
- a) **Modální analýza** (z modelu ve frekvenční oblasti)
- b) **FFT analýza zrychlení** (z modelu v časové oblasti)

Výsledky modální analýzy jsou patrné na obr. 14 a obr. 15, kde jsou vykresleny plochy 1. a 2. vlastní frekvence (houpání a kývání) skříně a jejich útlumy. Analogicky jako v kapitole 5.1 na těchto plochách byl udělán řez vybranou frekvencí houpání, např. zde 1,1 Hz (což je frekvence příjemná lidskému organismu). Průsečnice jsou promítnuty do horizontální roviny XY, čímž vzniknou křivky konstantní frekvence houpání a kývání. Křivky reprezentují kombinaci parametrů k_2 , b_2 potřebných pro dosažení frekvence houpání a kývání na skříní 1,1 Hz. Tyto křivky jsou následně promítnuty na plochy v obr. 9, 10, 11, 12 a 13.

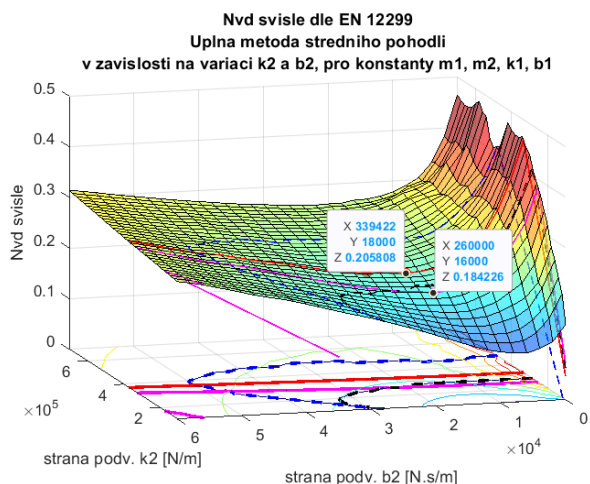
Na těchto promítnutých křivkách jsou následně určena **minima, která představují nejlepší možné hodnoty známek komfortu na skříní, kterých lze teoreticky dosáhnout**, pokud jsou zvoleny konkrétní cílové frekvence houpání nebo kývání.

Simulace byly provedeny pro varianty jak koridorové trati, tak i regionální trati. Numerické výsledky jsou uvedeny v tab. 3 v závěru příspěvku. Výsledné grafy na obr. 9 až 13 jsou zde pro nedostatek místa zobrazeny pouze pro variantu koridorové trati. U regionální trati obecně dojde k posunu celé plochy k vyšším hodnotám známky komfortu (nižší komfort) a „údolí“ se mírně prohloubí a jeho minimum se posune k nižším hodnotám tlumení.

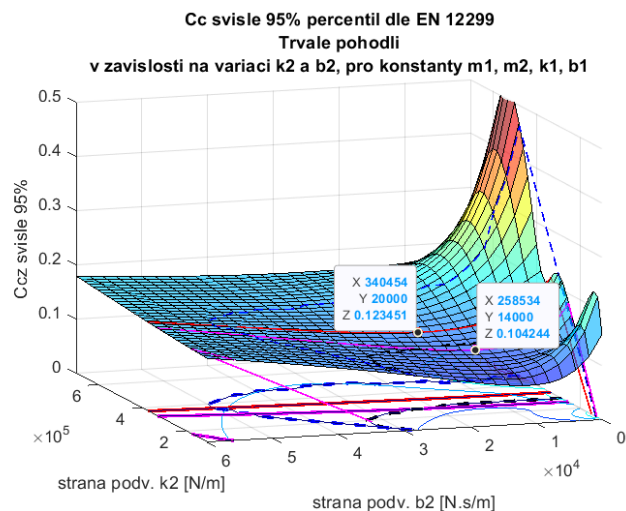
Koridorová trať, rychlost 160 km/h



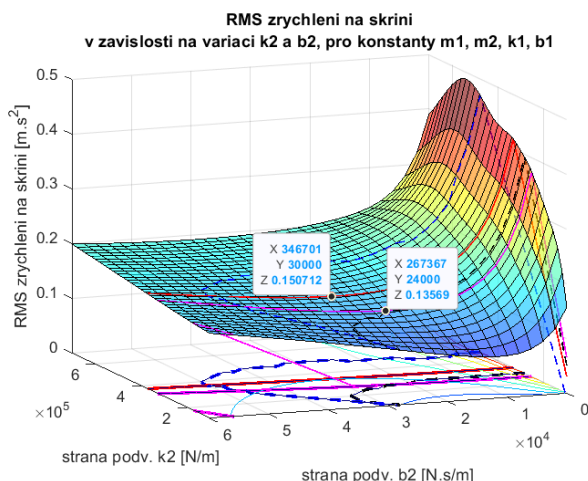
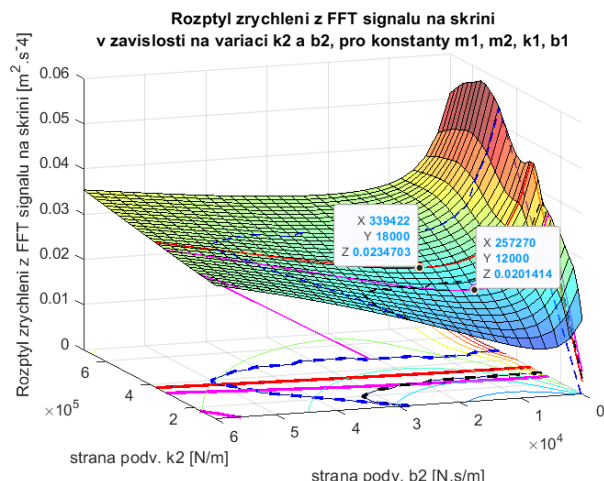
Obr. 9 Průběh N_{MV} dle EN 12299



Obr. 10 Průběh NVD dle EN 12299

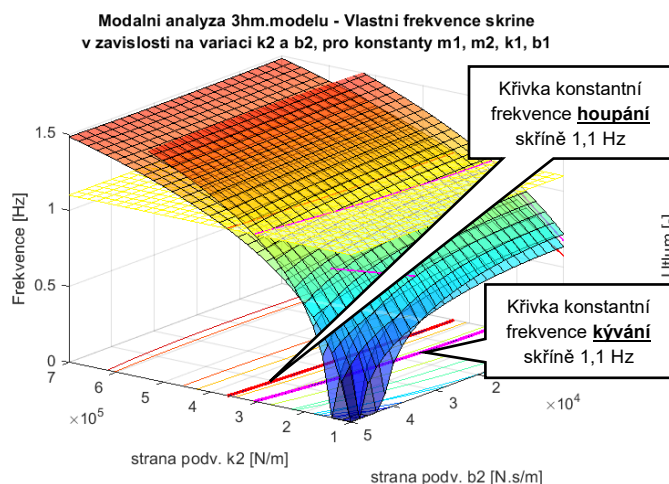


Obr. 11 Průběh CCZ dle EN 12299

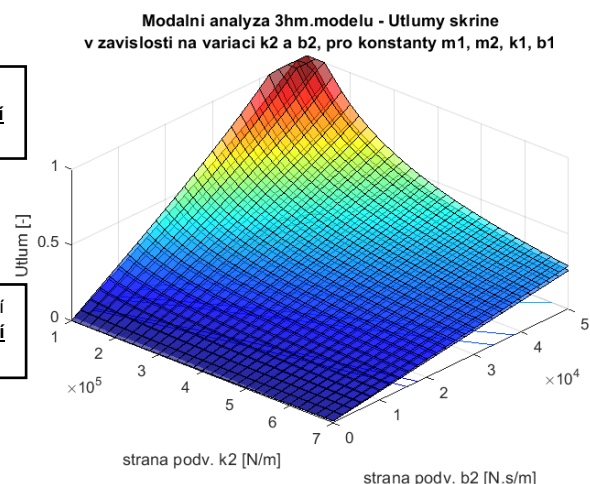
Obr. 12 Průběh AZ_{RMS} na skřini

Obr. 13 Průběh rozptylu zrychlení na skřini

Průběh první a druhé vlastní frekvence (houpání, kývání) skříně a útlumu v závislosti na parametrech k2, b2

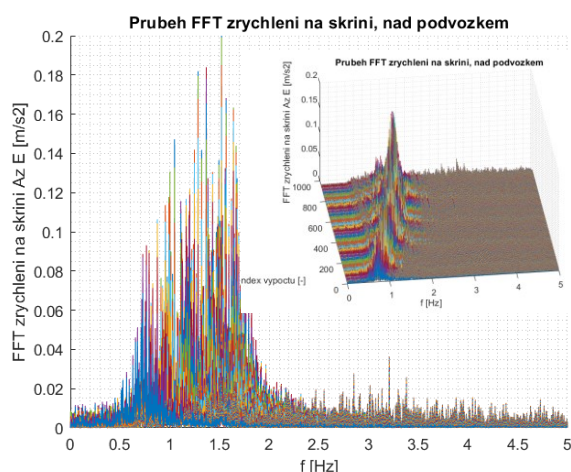


Obr. 14 Průběh frekvencí houpání a kývání skříně

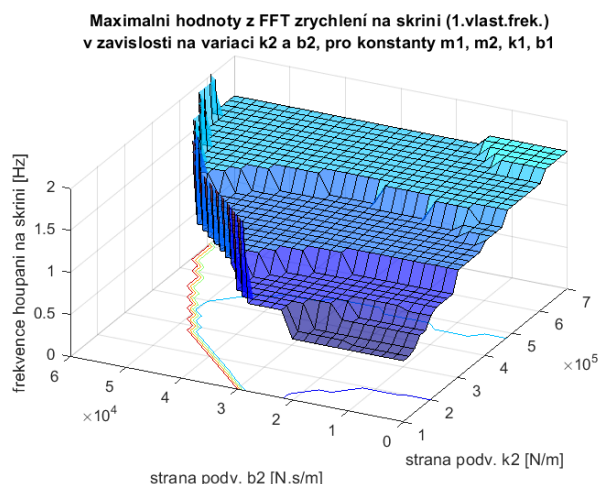


Obr. 15 Průběh útlumů houpání a kývání skříně

Zobrazení FFT spekter ze všech 1000 průjezdů a jejich maximálních hodnot



Obr. 16 Průběh FFT zrychlení pro všech 1000 průjezdů



Obr. 17 Maximální hodnoty z FFT zrychlení pro všech 1000 průjezdů

6 ZÁVĚR

Příspěvek ukazuje možnosti použití redukovaných modelů při návrhu a optimalizaci vypružení kolejového vozidla a dále rozvíjí klasické optimalizační metody vypružení popsané zejména v [2], [3], [4]. Výpočty jsou provedeny v časové oblasti s buzením reálnými nerovnostmi koleje a jsou vyčísleny známky komfortu dle standardu EN 12299.

V tab. 3 jsou patrné výsledky optimálních hodnot tuhosti a tlumení v sekundárním vypružení. Z výsledků plyne, že tříhmotový tlumený model ukazuje při optimalizaci **na nižší kvalitě trati s nižší rychlostí jízdy na menší konstanty tlumení a naopak pro kvalitní koridorovou trať s vyšší rychlostí jízdy ukazuje na mírně vyšší konstanty tlumení sekundárního vypružení.**

Tab. 3 Výsledky optimálních parametrů sekundárního vypružení

Typ buzení modelu	Parametry	Dvuhmotový tlumený model s parametry dle tab. 1		Tříhmotový tlumený model s parametry dle tab. 2	
		Tuhost k2 na stranu podvozku [N/mm]	Tlumení b2 na stranu podvozku [kN.s/m]	Tuhost k2 na stranu podvozku [N/mm]	Tlumení b2 na stranu podvozku [kN.s/m]
Koridorová trať, 160 km/h	Az RMS	316	25	347	30
	N _{MV} dle EN 12299	313	11	340	20
	N _{VD} dle EN 12299	-	-	339	18
	C _{Cz} dle EN 12299	-	-	340	20
Regionální trať, 100 km/h	Az RMS	316	19	338	16
	N _{MV} dle EN 12299	312	15	338	14
	N _{VD} dle EN 12299	-	-	336	10
	C _{Cz} dle EN 12299	-	-	335	6

Obecně lze konstatovat, že popsáný způsob optimalizace parametrů sekundárního vypružení se zacílením na známky komfortu dle standardu EN 12299 dává nízké hodnoty tlumení, což odpovídá i praktickým zkušenostem z jízdních zkoušek, kdy nižší konstanty tlumení přispívají ke zlepšení komfortu na skříní.



Literatura

- [1] ČERVENKA, Z., BYRTUS, M. Zjednodušené dynamické modely v optimalizaci vypružení. In: *Súčasné problémy v koľajových vozidlách – PRORAIL 2023: XXVI. medzinárodná konferencia, zborník prednášok, diel I.* Žilina: VTS při ŽU v Žiline, 2023, s. 71–80. ISBN 978-80-89276-61-5.
- [2] ŠVEJNOCH, V. *Teorie kolejových vozidel.* Praha: ČVUT v Praze, 1991.
- [3] FREIBAUER, L., RUS, L., ZAHRÁDKA, J. *Dynamika kolejových vozidel.* Praha: NADAS, 1988.
- [4] NĚMEC, J., RUS, L., SYNEK, V., KOLÁŘ, J., KRUPÍČKA, M. *Dynamické jevy, namáhání a porušování pojezdu lokomotiv.* Praha: NADAS, 1986.
- [5] VOHRADSKÝ, J. *Lokomotiva v pohybu.* Plzeň: ŠKODA, 1991.

Zasláno / received: 13. 06. 2025, přijato / accepted: 10. 07. 2025, publikováno / published: 17. 09. 2025.

Příspěvek recenzovali / The paper was reviewed by: prof. Dr. Ing. Juraj Gerlici (Žilinská univerzita v Žiline, Strojnícka fakulta), doc. Ing. Tomáš Michálek, Ph.D. (Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera).